Prof. Dr. Alfred Toth

Das semiotische Diamantenfeld

1. Wir definieren eine 2-stellige Relation R auf einer Menge A mit $a \in A$. Dann gibt es vier Möglichkeiten:

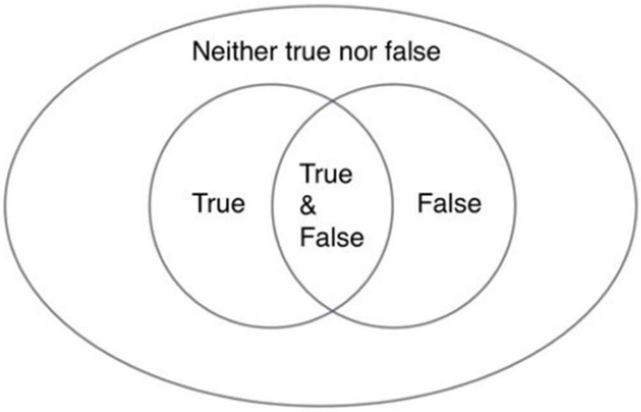
1.1. $R(a, x)$ gilt nur für $x = a$.

1.2. $R(a, x)$ gilt nur für Elemente $x \in A$ mit $x \neq a$.

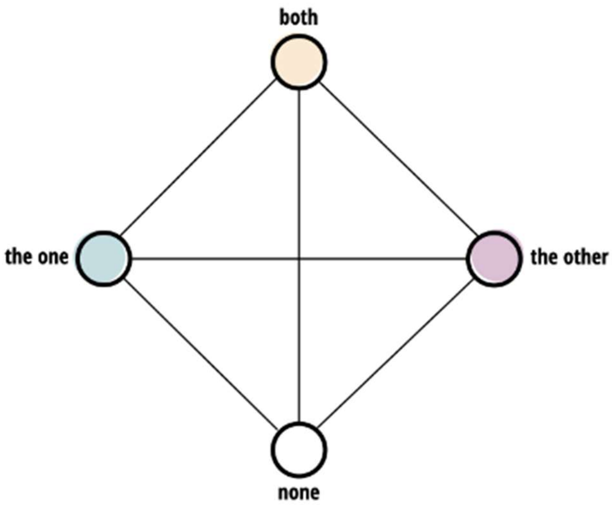
1.3. $R(a, x)$ gilt sowohl für $x = a$ als auch für Elemente $x \in A$ mit $x \neq a$.

1.4. $R(a, x)$ gilt für kein $x \in A$.

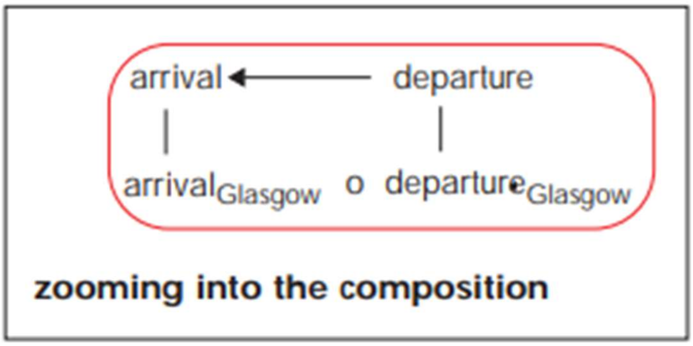
Man kann diese vier Relationen entweder in dem folgenden Venn-Diagramm



oder mit dem sog. Tetralemma darstellen.



Das Tetralemma wurde von Kaehr dazu benutzt, das sog. diamond-Modell zu definieren. Dieses ist ein um die polykontexturalen Abbildungen ergänztes Kategorienmodell. Es wurde von Kaehr (2007, S. 13 ff.) wie folgt informell eingeführt.



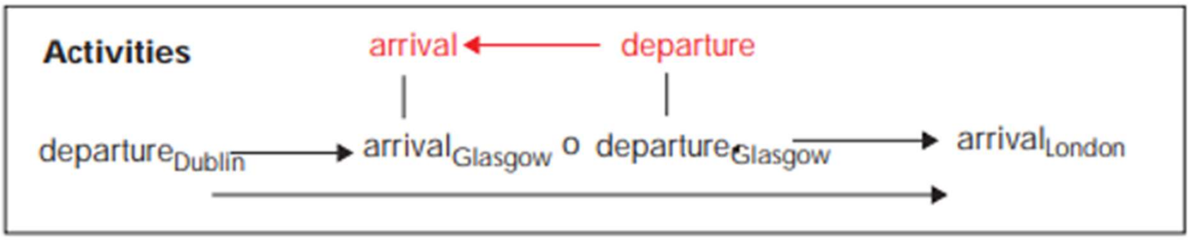
First, we observe the composition of the part-travels "o" aiming forwards to the aim.

Second, we discover a counter-movement in this activity of connecting parts, aiming into the opposite direction of the composition operation.

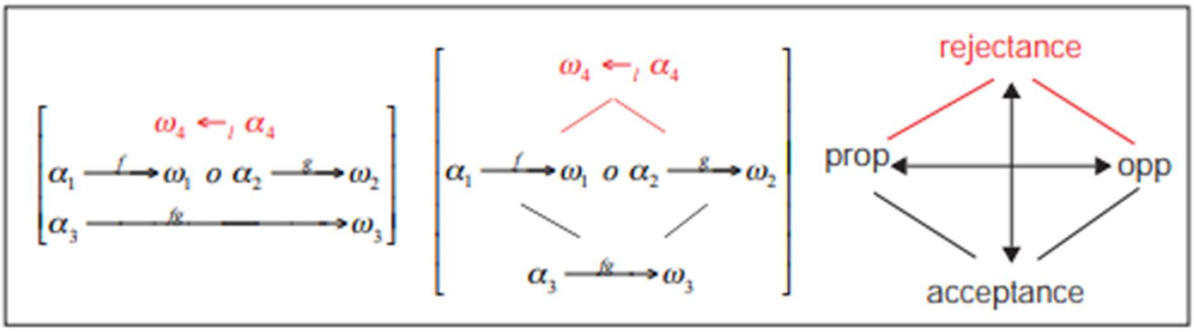
It may not be easy to understand why we have to deal with complicating such simple things. But we remember, even a single journey, without any connections, is a double movement. It is always simultaneously a dynamic of *away* and *anear*, to and fro, an intriguing *mêlée* of both. Not a toggle between one and the other, no flip-flop at all, but happening simultaneously both at once, coming and going.

Wenn ich also etwa von A nach B reise, nähere ich mich nicht nur B, sondern entferne mich gleichzeitig von A. Daß diesem Vorgang keine 2-wertige Lichtschalterlogik zugrunde liegt, motiviert die Einführung eines nicht-2-zweiwertigen weiteren kategorientheoretischen Abbildungstyps, den von Kaehr so genannten Heteromorphismen.

Departure is always the opposite of arrival. But this simple fact is also always doubled. The departure is the *double opposite* of arrival, the past arrival and the arrival in the future. Thus, the duplicity has to be realized at once. Let's read the diagram!



We can change terms now to introduce a more general approach to our intellectual journey. We replace for *departure* "alpha" and for *arrival* "omega" and omit the names of the cities. We get the first diagram. Then we stretch it to a nicer form. This is the diamond diagram of the arrows. Connected with a known terminology we get into the diamond of (proposition, opposition, acceptance, rejectance).



Further wordings

The class of departures can be taken as the position of *proposition*.
The class of arrivals can be taken as the position of the *opposition*.
The class of compositions can be taken as the position of the *acceptance*.
The class of complements can be taken as the position of the *rejectance*.
Acceptance means: both at once, proposition and opposition.
Rejectance means: neither-nor, neither proposition nor opposition.

Putting things together again, cities and activities, we get a final diagram

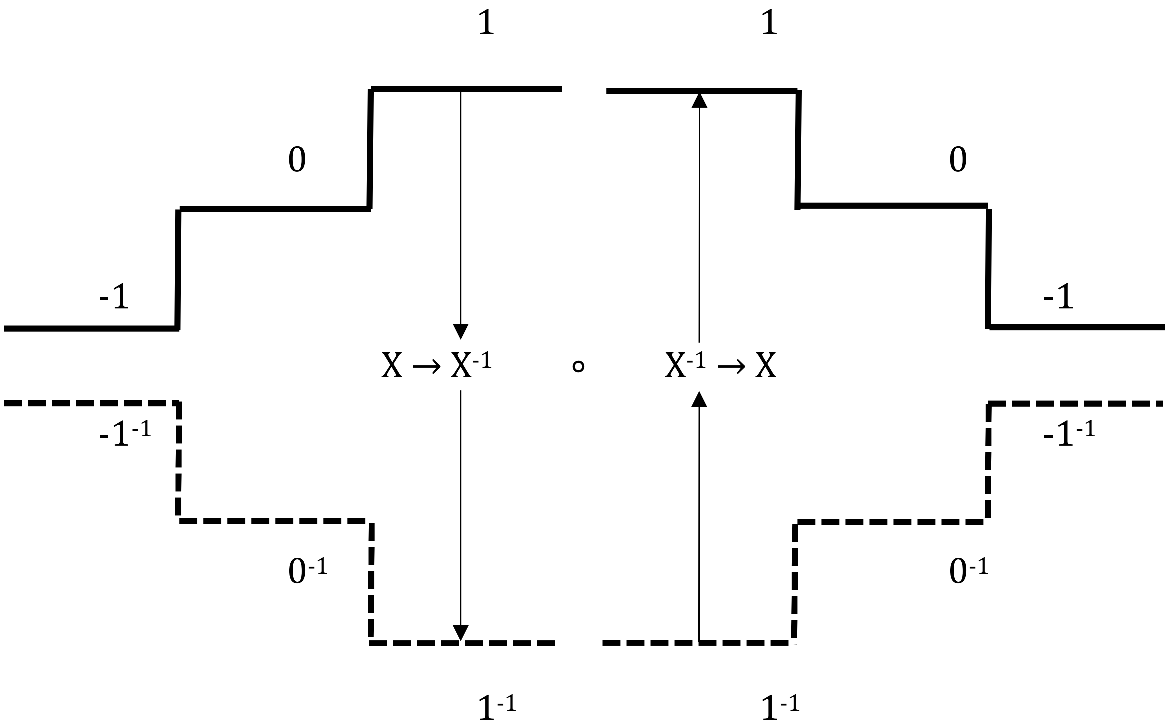
$$\left[\begin{array}{ccc}
 & (Glasgow, \omega_4) \xleftarrow{R_{\delta(A,B)}} (Glasgow, \alpha_4) & \\
 & \diagup\diagdown & \\
(Dublin, \alpha_1) \xrightarrow{R_1} & (Glasgow, \omega_1) \; o \; (Glasgow, \alpha_2) & \xrightarrow{R_2} (London, \omega_2) \\
\diagdown & & \diagup \\
 & (Dublin, \alpha_3) \xrightarrow{R_{13}} (London, \omega_3) &
\end{array}\right]$$

oder in kategorientheoretischer Darstellung (Kaehr 2007, S. 22):

$$\begin{array}{ccc}
 & (B^1, \omega_4) \leftarrow (A^2, \alpha_4) & \\
 & \diagup\diagdown \; \delta & \\
(A^1, \alpha_1) \xrightarrow{morph} & (B^1, \omega_1) \; o \; (A^2, \alpha_2) & \xrightarrow{morph} (B^2, \omega_2) \\
\diagdown & & \diagup \; \varphi \\
 & (A^1, \alpha_3) \xrightarrow{morph} (B^2, \omega_3) &
\end{array}$$

Es gibt also in einer polykontexturalen Kategorientheorie nicht nur These und Antithese, die sich zur Synthese vereinigen lassen, sondern zu diesem positiven Sowohl-als-auch-Prozeß noch den entsprechenden negativen Weder-noch-Prozeß, d.h. neben der Akzeption auch die ihr zugehörige Rejektion. Damit kann also etwa eine 2-wertige Alternative innerhalb einer n-wertigen Logik mit n ≧ 2 zugunsten eines oder mehrerer weiterer logischen Werte verworfen werden (vgl. Günther 1962 [1976]).

2. Wir gehen nun aus von dem PC-Schema der Primzeichenrelation (vgl. Toth 2022) mit ZR = (-1, 0, 1) und bilden es auf das Diamond-Modell mit den vier Relation 1.1. bis 1.4. ab:



Dann ist

L = (0, 1)

L* = (0, R, 1) ≠ (1, R, 0) mit R(0, 1) ≠ R(1, 0)

und

$L_1^* = (0, (1))$ $\quad$ $L_1^{*-1} = ((1), 0)$

$L_2^* = (1, (0))$ $\quad$ $L_2^{*-1} = ((0), 1)$.

Da ZR so allgemein formuliert ist, dass sie nicht nur für Zeichen (Ze), sondern auch für Zahlen (Za) und für Objekte (Ob) gilt (vgl. Toth 2015), bekommen wir

Ze ≅ Za ≅ Ob.

Vermöge dieser Isomorphie folgt

$Zkl^{\rightarrow} = (3.x, 2.y, 1.z)$ $\quad$ $Zkl^{\rightarrow-1} = (z.1, y.2, x.3)$

$Zkl^{\leftarrow} = (1.z, 2.y, 3.x)$ $\quad$ $Zkl^{\leftarrow-1} = (x.3, y.2, z.1)$,

d.h. wir haben nun für jedes semiotische System S ein tetralemmatisches System der Form S* für die vier logischen Möglichkeiten a, nicht-a, sowohl a als auch b, weder a noch b.

Das vollständige System der $3^3 = 27$ semiotischen Dualsysteme

$DS = (Zkl^{\rightarrow}, Zkl^{\rightarrow-1})$

über

$Zkl = (3.x, 2.y, 1.z)$ mit $x, y, z \in (1, 2, 3)$ mit $x \leq y \leq z$

läßt sich also wie folgt darstellen:

1. Semiotisches L*-System

$Zkl_1^{\rightarrow} = (3.1, 2.1, 1.1)$ $Zkl_1^{\rightarrow -1} = (1.1, 1.2, 1.3)$

$Zkl_1^{\leftarrow} = (1.1, 2.1, 3.1)$ $Zkl_1^{\leftarrow -1} = (1.3, 1.2, 1.1)$

2. Semiotisches L*-System

$Zkl_2^{\rightarrow} = (3.1, 2.1, 1.2)$ $Zkl_2^{\rightarrow -1} = (2.1, 1.2, 1.3)$

$Zkl_2^{\leftarrow} = (1.2, 2.1, 3.1)$ $Zkl_2^{\leftarrow -1} = (1.3, 1.2, 2.1)$

3. Semiotisches L*-System

$Zkl_3^{\rightarrow} = (3.1, 2.1, 1.3)$ $Zkl_3^{\rightarrow -1} = (3.1, 1.2, 1.3)$

$Zkl_3^{\leftarrow} = (1.3, 2.1, 3.1)$ $Zkl_3^{\leftarrow -1} = (1.3, 1.2, 3.1)$

4. Semiotisches L*-System

$Zkl_4^{\rightarrow} = (3.1, 2.2, 1.1)$ $Zkl_4^{\rightarrow -1} = (1.1, 2.2, 1.3)$

$Zkl_4^{\leftarrow} = (1.1, 2.2, 3.1)$ $Zkl_4^{\leftarrow -1} = (1.3, 2.2, 1.1)$

5. Semiotisches L*-System

$Zkl_5^{\rightarrow} = (3.1, 2.2, 1.2)$ $Zkl_5^{\rightarrow -1} = (2.1, 2.2, 1.3)$

$Zkl_5^{\leftarrow} = (1.2, 2.2, 3.1)$ $Zkl_5^{\leftarrow -1} = (1.3, 2.2, 2.1)$

6. Semiotisches L*-System

$Zkl_6^{\rightarrow} = (3.1, 2.2, 1.3)$ $Zkl_6^{\rightarrow -1} = (3.1, 2.2, 1.3)$

$Zkl_6^{\leftarrow} = (1.3, 2.2, 3.1)$ $Zkl_6^{\leftarrow -1} = (1.3, 2.2, 3.1)$

7. Semiotisches L*-System

$Zkl_7^{\rightarrow} = (3.1, 2.3, 1.1)$ $Zkl_7^{\rightarrow -1} = (1.1, 3.2, 1.3)$

$Zkl_7^{\leftarrow} = (1.1, 2.3, 3.1)$ $Zkl_7^{\leftarrow -1} = (1.3, 3.2, 1.1)$

8. Semiotisches L*-System

$Zkl_8^{\rightarrow} = (3.1, 2.3, 1.2)$ $Zkl_8^{\rightarrow -1} = (2.1, 3.2, 1.3)$

$Zkl_8^{\leftarrow} = (1.2, 2.3, 3.1)$ $Zkl_8^{\leftarrow -1} = (1.3, 3.2, 2.1)$

9. Semiotisches L*-System

$Zkl_9^{\rightarrow} = (3.1, 2.3, 1.3)$ $Zkl_9^{\rightarrow-1} = (3.1, 3.2, 1.3)$

$Zkl_9^{\leftarrow} = (1.3, 2.3, 3.1)$ $Zkl_9^{\leftarrow-1} = (1.3, 3.2, 3.1)$

----

10. Semiotisches L*-System

$Zkl_{10}^{\rightarrow} = (3.2, 2.1, 1.1)$ $Zkl_{10}^{\rightarrow-1} = (1.1, 1.2, 2.3)$

$Zkl_{10}^{\leftarrow} = (1.1, 2.1, 3.2)$ $Zkl_{10}^{\leftarrow-1} = (2.3, 1.2, 1.1)$

11. Semiotisches L*-System

$Zkl_{11}^{\rightarrow} = (3.2, 2.1, 1.2)$ $Zkl_{11}^{\rightarrow-1} = (2.1, 1.2, 2.3)$

$Zkl_{11}^{\leftarrow} = (1.2, 2.1, 3.2)$ $Zkl_{11}^{\leftarrow-1} = (2.3, 1.2, 2.1)$

12. Semiotisches L*-System

$Zkl_{12}^{\rightarrow} = (3.2, 2.1, 1.3)$ $Zkl_{12}^{\rightarrow-1} = (3.1, 1.2, 2.3)$

$Zkl_{12}^{\leftarrow} = (1.3, 2.1, 3.2)$ $Zkl_{12}^{\leftarrow-1} = (2.3, 1.2, 3.1)$

13. Semiotisches L*-System

$Zkl_{13}^{\rightarrow} = (3.2, 2.2, 1.1)$ $Zkl_{13}^{\rightarrow-1} = (1.1, 2.2, 2.3)$

$Zkl_{13}^{\leftarrow} = (1.1, 2.2, 3.2)$ $Zkl_{13}^{\leftarrow-1} = (2.3, 2.2, 1.1)$

14. Semiotisches L*-System

$Zkl_{14}^{\rightarrow} = (3.2, 2.2, 1.2)$ $Zkl_{14}^{\rightarrow-1} = (2.1, 2.2, 2.3)$

$Zkl_{14}^{\leftarrow} = (1.2, 2.2, 3.2)$ $Zkl_{14}^{\leftarrow-1} = (2.3, 2.2, 2.1)$

15. Semiotisches L*-System

$Zkl_{15}^{\rightarrow} = (3.2, 2.2, 1.3)$ $Zkl_{15}^{\rightarrow-1} = (3.1, 2.2, 2.3)$

$Zkl_{15}^{\leftarrow} = (1.3, 2.2, 3.2)$ $Zkl_{15}^{\leftarrow-1} = (2.3, 2.2, 3.1)$

16. Semiotisches L*-System

$Zkl_{16}^{\rightarrow} = (3.2, 2.3, 1.1)$ $Zkl_{16}^{\rightarrow-1} = (1.1, 3.2, 2.3)$

$Zkl_{16}^{\leftarrow} = (1.1, 2.3, 3.2)$ $Zkl_{16}^{\leftarrow-1} = (2.3, 3.2, 1.1)$

17. Semiotisches L*-System

$Zkl_{17}^{\rightarrow} = (3.2, 2.3, 1.2)$ $Zkl_{17}^{\rightarrow-1} = (2.1, 3.2, 2.3)$

$Zkl_{17}^{\leftarrow} = (1.2, 2.3, 3.2)$ $Zkl_{17}^{\leftarrow-1} = (2.3, 3.2, 2.1)$

18. Semiotisches L*-System

$Zkl_{18}^{\rightarrow} = (3.2, 2.3, 1.3)$ $Zkl_{18}^{\rightarrow-1} = (3.1, 3.2, 2.3)$

$Zkl_{18}^{\leftarrow} = (1.3, 2.3, 3.2)$ $Zkl_{18}^{\leftarrow-1} = (2.3, 3.2, 3.1)$

----

19. Semiotisches L*-System

$Zkl_{19}^{\rightarrow} = (3.3, 2.1, 1.1)$ $Zkl_{19}^{\rightarrow-1} = (1.1, 1.2, 3.3)$

$Zkl_{19}^{\leftarrow} = (1.1, 2.1, 3.3)$ $Zkl_{19}^{\leftarrow-1} = (3.3, 1.2, 1.1)$

20. Semiotisches L*-System

$Zkl_{20}^{\rightarrow} = (3.3, 2.1, 1.2)$ $Zkl_{20}^{\rightarrow-1} = (2.1, 1.2, 3.3)$

$Zkl_{20}^{\leftarrow} = (1.2, 2.1, 3.3)$ $Zkl_{20}^{\leftarrow-1} = (3.3, 1.2, 2.1)$

21. Semiotisches L*-System

$Zkl_{21}^{\rightarrow} = (3.3, 2.1, 1.3)$ $Zkl_{21}^{\rightarrow-1} = (3.1, 1.2, 3.3)$

$Zkl_{21}^{\leftarrow} = (1.3, 2.1, 3.3)$ $Zkl_{21}^{\leftarrow-1} = (3.3, 1.2, 3.1)$

22. Semiotisches L*-System

$Zkl_{22}^{\rightarrow} = (3.3, 2.2, 1.1)$ $Zkl_{22}^{\rightarrow-1} = (1.1, 2.2, 3.3)$

$Zkl_{22}^{\leftarrow} = (1.1, 2.2, 3.3)$ $Zkl_{22}^{\leftarrow-1} = (3.3, 2.2, 1.1)$

23. Semiotisches L*-System

$Zkl_{23}^{\rightarrow} = (3.3, 2.2, 1.2)$ $Zkl_{23}^{\rightarrow-1} = (2.1, 2.2, 3.3)$

$Zkl_{23}^{\leftarrow} = (1.2, 2.2, 3.3)$ $Zkl_{23}^{\leftarrow-1} = (3.3, 2.2, 2.1)$

24. Semiotisches L*-System

$Zkl_{24}^{\rightarrow} = (3.3, 2.2, 1.3)$ $Zkl_{24}^{\rightarrow-1} = (3.1, 2.2, 3.3)$

$Zkl_{24}^{\leftarrow} = (1.3, 2.2, 3.3)$ $Zkl_{24}^{\leftarrow-1} = (3.3, 2.2, 3.1)$

25. Semiotisches L*-System

$Zkl_{25}^{\rightarrow} = (3.3, 2.3, 1.1)$ $Zkl_{25}^{\rightarrow-1} = (1.1, 3.2, 3.3)$

$Zkl_{25}^{\leftarrow} = (1.1, 2.3, 3.3)$ $Zkl_{25}^{\leftarrow-1} = (3.3, 3.2, 1.1)$

26. Semiotisches L*-System

$\mathrm{Zkl}_{26}^{\rightarrow} = (3.3, 2.3, 1.2)$ $\mathrm{Zkl}_{26}^{\rightarrow -1} = (2.1, 3.2, 3.3)$

$\mathrm{Zkl}_{26}^{\leftarrow} = (1.2, 2.3, 3.3)$ $\mathrm{Zkl}_{26}^{\leftarrow -1} = (3.3, 3.2, 2.1)$

27. Semiotisches L*-System

$\mathrm{Zkl}_{27}^{\rightarrow} = (3.3, 2.3, 1.3)$ $\mathrm{Zkl}_{27}^{\rightarrow -1} = (3.1, 3.2, 3.3)$

$\mathrm{Zkl}_{27}^{\leftarrow} = (1.3, 2.3, 3.3)$ $\mathrm{Zkl}_{27}^{\leftarrow -1} = (3.3, 3.2, 3.1)$

----

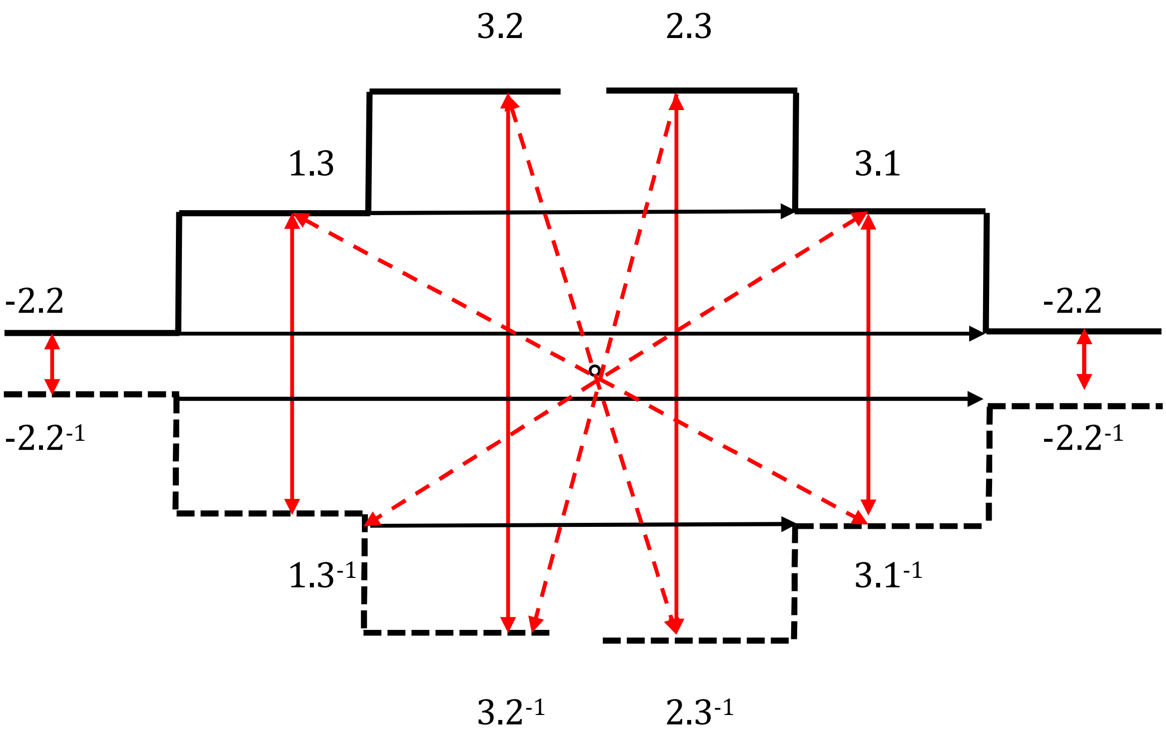
3. Bekanntlich gibt es unter den 27 L*-Systemen 2 duale und 25 nicht-duale. Wir untersuchen die beiden dualen und ein nicht-duales System mit Hilfe des tetralemmatischen PC-Modells. Für die nicht-dualen Systeme stehe

15. Semiotisches L*-System

$\mathrm{Zkl}_{15}^{\rightarrow} = (3.2, 2.2, 1.3)$ $\mathrm{Zkl}_{15}^{\rightarrow -1} = (3.1, 2.2, 2.3)$

$\mathrm{Zkl}_{15}^{\leftarrow} = (1.3, 2.2, 3.2)$ $\mathrm{Zkl}_{15}^{\leftarrow -1} = (2.3, 2.2, 3.1)$

Im folgenden werden nicht-duale Paare von Subzeichen durch ausgezogene, duale durch gestrichelte Linien miteinander verbunden.



Da in diesem Modell alle vier Möglichkeiten des Kaehrschen Diamantenmodells realisiert sind, nennen wir solche Modelle DIAMANTENFELDER (DF).

Wie man leicht zeigt, sind die Abbildungen für das obige spezielle DF die gleichen für alle semiotischen L*-Relationen, in denen die Menge L = (Zkl$^{\rightarrow}$ = (3.x, 2.y, 1.z), Zkl$^{\rightarrow-1}$ = (z.1, y.2, x.3)) nicht-dual ist, d.h. sie sind für jedes nicht-duale DF konstant (unabhängig für Belegungen der x, y, z).

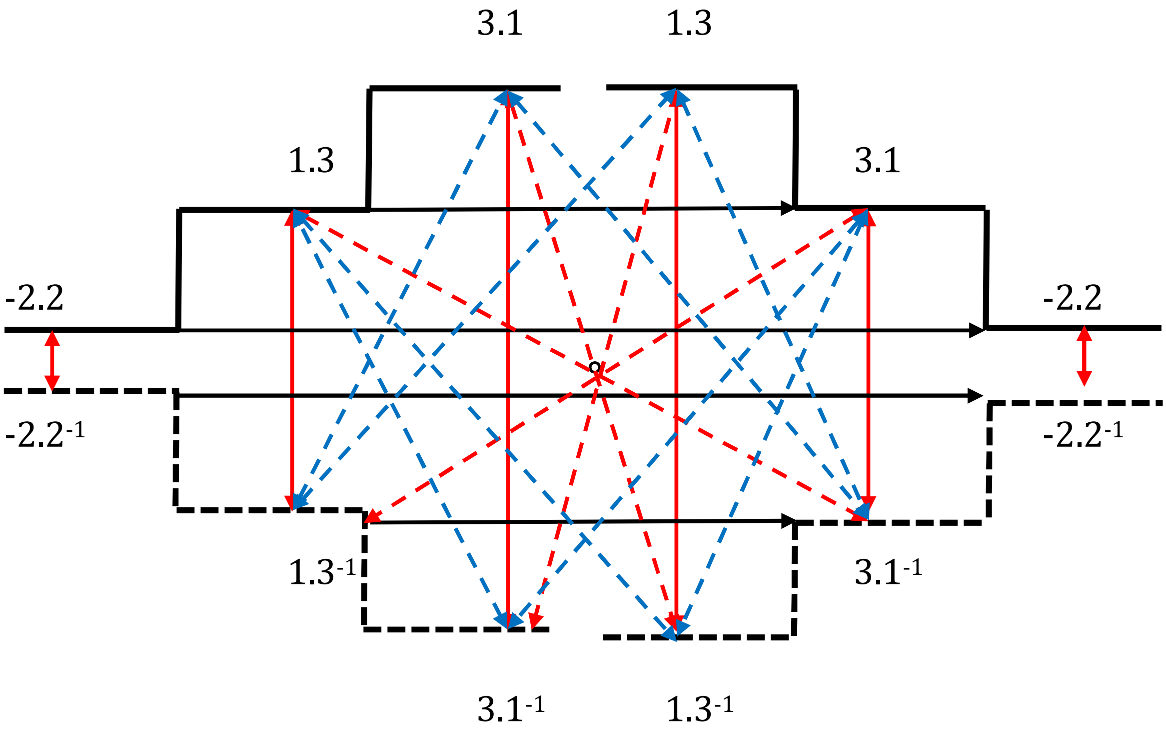
Als duales System stehe

6. Semiotisches L*-System

Zkl$_6^{\rightarrow}$ = (3.1, 2.2, 1.3)   Zkl$_6^{\rightarrow-1}$ = (3.1, 2.2, 1.3)

Zkl$_6^{\leftarrow}$ = (1.3, 2.2, 3.1)   Zkl$_6^{\leftarrow-1}$ = (1.3, 2.2, 3.1)

Die gegenüber den nicht-dualen neu auftretenden dualen Verbindungen werden blau markiert.



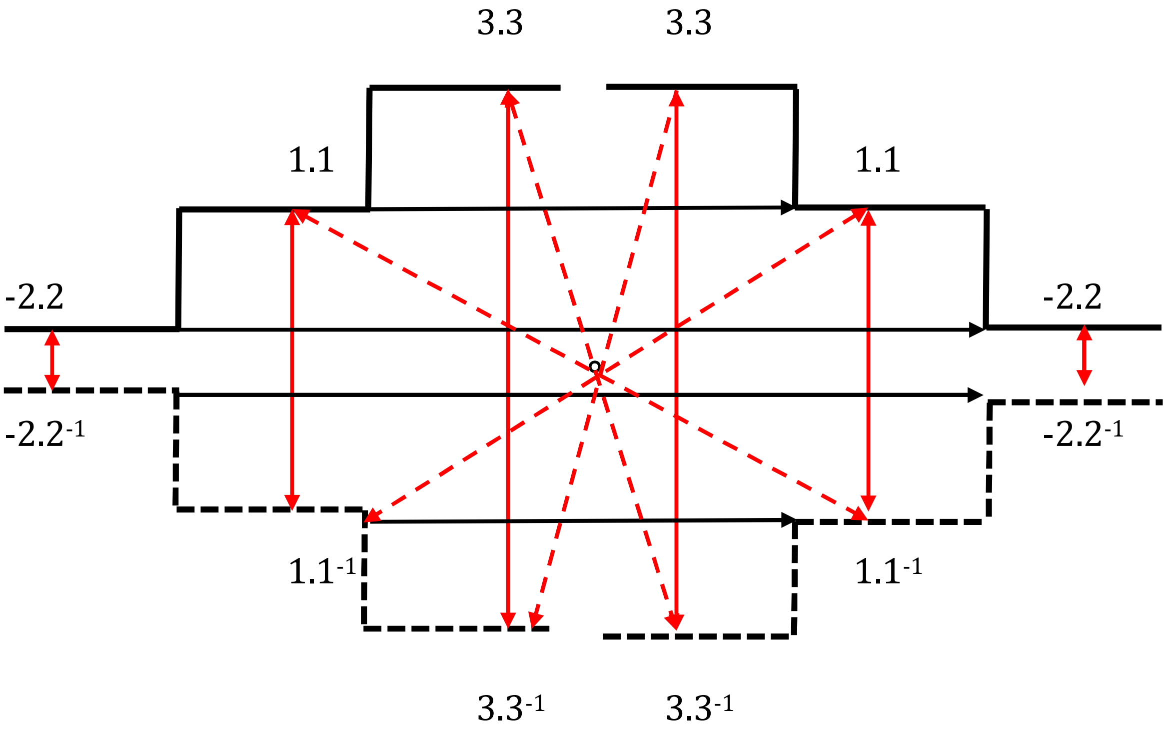
Neben dem eigenrealen dualen System (vgl. dazu Bense 1992) gibt es bekanntlich noch die Nebendiagonale der kleinen semiotischen Matrix, die ebenfalls duale Eigenschaften aufweist, allerdings keine Binnensymmetrie:

22. Semiotisches L*-System

Zkl$_{22}^{\rightarrow}$ = (3.3, 2.2, 1.1)   Zkl$_{22}^{\rightarrow-1}$ = (1.1, 2.2, 3.3)

Zkl$_{22}^{\leftarrow}$ = (1.1, 2.2, 3.3)   Zkl$_{22}^{\leftarrow-1}$ = (3.3, 2.2, 1.1)

Ihre Darstellung als DF ist isomorph derjenigen den DFs der nicht-dualen L*-Systeme:



Zusammenfassend ergibt sich, daß sich nicht nur die nicht-dualen L*-Systeme, sondern auch das duale L*-System der sog. peirceschen Kategorienklasse durch das gleiche DF darstellen lassen. Einzig das eigenreale (binnensymmetrische) L*-System muß durch ein erweitertes DF dargestellt werden. Dabei gilt

$DF_{-du} \subset DF_{+du}$.

Literatur

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Günther, Gotthard, Cybernetic Ontology and Transjunctional Operations (1962). In: ders., Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. Bd. 1. Hamburg 1976, S. 249-328.

Kaehr, Rudolf, The Book Of Diamonds. Glasgow, UK 2007

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Toth, Alfred, Die Quadrupelrelation von Außen und Innen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2022

26.1.2024